SPK: Linear Programming

Tri Hadiah Muliawati
PENS - 2025

Overview

Linear Programming (LP)

LP adalah salah satu metode riset operasi yang sudah ada sejak dulu dan masih banyak digunakan di industri untuk menyelesaikan permasalahan yang bisa diformulasikan secara matematis dan memiliki karakteristik linear.

Suatu permasalahan termasuk LP jika:

- Fungsi objektifnya linear (tanpa kuadrat, eksponen, atau interaksi variabel)
- Kendala linear dalam bentuk $\leq$, $\geq$, $=$
- Variabel keputusan bersifat numerik

Elemen LP

1. *Decision Variable* (1, 2, … n) / Variabel Keputusan
2. *Objective function /* Fungsi objektif
3. *Constraints* (1, 2, … m) / Batasan / Kendala

$$
\begin{array}{llll}
\min & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & & \textbf{(objective function)} \\
\text{s.t.} & g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i & \forall i = 1, \ldots, m & \textbf{(constraints)} \\
& x_j \in \mathbb{R} & \forall j = 1, \ldots, n. & \textbf{(decision variable)}
\end{array}
$$

Elemen LP - *Decision Variable*

- Variabel yang perlu ditentukan nilainya agar mencapai nilai *objective function* yang diinginkan.
- Misal:
  - Jumlah produk yang ingin diproduksi untuk tiap jenisnya,
  - Besaran harga per unit untuk tiap jenis produk, dsb.

Elemen LP - *Objective Function*

- Fungsi untuk menggambarkan tujuan yang ingin dicapai.
- Sifatnya memaksimalkan atau meminimalkan sesuatu.
- Misal:
    - Memaksimalkan profit yang didapatkan,
    - Meminimalkan biaya yang dikeluarkan, dsb

Elemen LP - *Constraints*

- Batasan yang dialami / dimiliki untuk mencapai *objective function*
- Terdiri atas *functional constraint* dan *signed constraint*
- Misal:
    - Jumlah modal yang dimiliki,
    - Jumlah waktu yang tersedia untuk produksi,
    - Jumlah ketersediaan bahan baku, dsb.

Formulasi atau Pemodelan LP

Untuk bisa diselesaikan dengan mudah, maka suatu permasalahan dengan karakteristik linear perlu diformulasikan / dimodelkan secara matematis.

Salah satu permasalahan yang umum dimodelkan dengan LP adalah permasalahan kombinasi produk (product mix problem), dimana:

- Ada beberapa jenis produk yang akan diproduksi
- Tiap produk yang akan dibuat membutuhkan sumber daya, sedangkan sumber daya terbatas
- Kita ingin memaksimalkan keuntungan total dengan sumber daya yang terbatas tsb.

Formulasi atau Pemodelan LP

Berikut merupakan hal yang perlu diperhatikan ketika memformulasikan LP:

- Definisikan *decision variable* di awal
- Tuliskan *objective function* sebelum menuliskan *constraint*
- Gunakan unit pengukuran yang sama
- Tuliskan komentar di akhir tiap *constraint* untuk memperjelas
- *Functional constraint* dituliskan sebelum *signed constraint*

Contoh 1

Perusahaan Berkah Furniture yang akan membuat meja dan kursi. Keuntungan yang diperoleh dari satu unit meja adalah Rp. 70.000,- sedang keuntungan yang diperoleh dari satu unit kursi adalah Rp. 50.000,-. Namun untuk meraih keuntungan tersebut Berkah Furniture menghadapi kendala keterbatasan jam kerja.

Untuk pembuatan 1 unit meja dia memerlukan 4 jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit kursi dia membutuhkan 3 jam kerja. Untuk pengecatan 1 unit meja dibutuhkan 30 menit, dan untuk pengecatan 1 unit kursi dibutuhkan 45 menit. Jumlah jam kerja yang tersedia untuk pembuatan meja dan kursi adalah 200 jam per minggu sedang jumlah jam kerja untuk pengecatan adalah 40 jam per minggu. Berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi per minggu agar keuntungan perusahaan maksimum?

Contoh 1

Penentuan *decision variable*

Perusahaan Berkah Furniture yang akan membuat meja dan kursi. Keuntungan yang diperoleh dari satu unit meja adalah Rp. 70.000,- sedang keuntungan yang diperoleh dari satu unit kursi adalah Rp. 50.000,-. Namun untuk meraih keuntungan tersebut Berkah Furniture menghadapi kendala keterbatasan jam kerja.

Untuk pembuatan 1 unit meja dia memerlukan 4 jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit kursi dia membutuhkan 3 jam kerja. Untuk pengecatan 1 unit meja dibutuhkan 30 menit, dan untuk pengecatan 1 unit kursi dibutuhkan 45 menit. Jumlah jam kerja yang tersedia untuk pembuatan meja dan kursi adalah 200 jam per minggu sedang jumlah jam kerja untuk pengecatan adalah 40 jam per minggu. Berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi per minggu agar keuntungan perusahaan maksimum?

Decision variable:

Jumlah meja yang diproduksi = x

Jumlah kursi yang diproduksi = y

Contoh 1

Penentuan *objective function*

Perusahaan Berkah Furniture yang akan membuat meja dan kursi. Keuntungan yang diperoleh dari satu unit meja adalah Rp. 70.000,- sedang keuntungan yang diperoleh dari satu unit kursi adalah Rp. 50.000,-. Namun untuk meraih keuntungan tersebut Berkah Furniture menghadapi kendala keterbatasan jam kerja.

Untuk pembuatan 1 unit meja dia memerlukan 4 jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit kursi dia membutuhkan 3 jam kerja. Untuk pengecatan 1 unit meja dibutuhkan 30 menit, dan untuk pengecatan 1 unit kursi dibutuhkan 45 menit. Jumlah jam kerja yang tersedia untuk pembuatan meja dan kursi adalah 200 jam per minggu sedang jumlah jam kerja untuk pengecatan adalah 40 jam per minggu. Berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi per minggu agar keuntungan perusahaan maksimum?

Decision variable:

Jumlah meja yang diproduksi = x

Jumlah kursi yang diproduksi = y

Objective function:

max f(x,y) = 70000x + 50000y

Contoh 1

Penentuan *functional constraint* (gunakan unit pengukuran yang sama)

Perusahaan Berkah Furniture yang akan membuat meja dan kursi. Keuntungan yang diperoleh dari satu unit meja adalah Rp. 70.000,- sedang keuntungan yang diperoleh dari satu unit kursi adalah Rp. 50.000,-. Namun untuk meraih keuntungan tersebut Berkah Furniture menghadapi kendala keterbatasan jam kerja.

Untuk pembuatan 1 unit meja dia memerlukan 4 jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit kursi dia membutuhkan 3 jam kerja. Untuk pengecatan 1 unit meja dibutuhkan 30 menit, dan untuk pengecatan 1 unit kursi dibutuhkan 45 menit. Jumlah jam kerja yang tersedia untuk pembuatan meja dan kursi adalah 200 jam per minggu sedang jumlah jam kerja untuk pengecatan adalah 40 jam per minggu. Berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi per minggu agar keuntungan perusahaan maksimum?

Decision variable:

Jumlah meja yang diproduksi = x

Jumlah kursi yang diproduksi = y

Objective function:

max f(x,y) = 70000x + 50000y

Constraint:

$4x + 3y \leq 200$ (jam kerja pembuatan)

Contoh 1

Penentuan *functional constraint* (gunakan unit pengukuran yang sama)

Perusahaan Berkah Furniture yang akan membuat meja dan kursi. Keuntungan yang diperoleh dari satu unit meja adalah Rp. 70.000,- sedang keuntungan yang diperoleh dari satu unit kursi adalah Rp. 50.000,-. Namun untuk meraih keuntungan tersebut Berkah Furniture menghadapi kendala keterbatasan jam kerja.

Untuk pembuatan 1 unit meja dia memerlukan 4 jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit kursi dia membutuhkan 3 jam kerja. Untuk pengecatan 1 unit meja dibutuhkan 30 menit, dan untuk pengecatan 1 unit kursi dibutuhkan 45 menit. Jumlah jam kerja yang tersedia untuk pembuatan meja dan kursi adalah 200 jam per minggu sedang jumlah jam kerja untuk pengecatan adalah 40 jam per minggu. Berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi per minggu agar keuntungan perusahaan maksimum?

Decision variable:

Jumlah meja yang diproduksi = x

Jumlah kursi yang diproduksi = y

Objective function:

max $f(x,y) = 70000x + 50000y$

Constraint:

$4x + 3y \leq 200$ (jam kerja pembuatan)

$0.5x + 0.75y \leq 40$ (jam kerja pengecatan)

Contoh 1

Penentuan *signed constraint*

Perusahaan Berkah Furniture yang akan membuat meja dan kursi. Keuntungan yang diperoleh dari satu unit meja adalah Rp. 70.000,- sedang keuntungan yang diperoleh dari satu unit kursi adalah Rp. 50.000,-. Namun untuk meraih keuntungan tersebut Berkah Furniture menghadapi kendala keterbatasan jam kerja.

Untuk pembuatan 1 unit meja dia memerlukan 4 jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit kursi dia membutuhkan 3 jam kerja. Untuk pengecatan 1 unit meja dibutuhkan 30 menit, dan untuk pengecatan 1 unit kursi dibutuhkan 45 menit. Jumlah jam kerja yang tersedia untuk pembuatan meja dan kursi adalah 200 jam per minggu sedang jumlah jam kerja untuk pengecatan adalah 40 jam per minggu. Berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi per minggu agar keuntungan perusahaan maksimum?

Decision variable:

Jumlah meja yang diproduksi = x

Jumlah kursi yang diproduksi = y

Objective function:

max f(x,y) = 70000x + 50000y

Constraint:

$4x + 3y \leq 200$ (jam kerja pembuatan)

$0.5x + 0.75y \leq 40$ (jam kerja pengecatan)

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Latihan

Tentukan *decision variable*, *objective function*, dan *constraint* dari studi kasus tersebut!

Perusahaan Smile Bakery yang akan membuat 2 jenis kue, yakni kue A dan kue B. Keuntungan yang diperoleh dari satu kue A adalah Rp. 25000,- sedang keuntungan yang diperoleh dari satu kue B adalah Rp. 40.000,-. Tiap jenis kue memiliki kebutuhan yang berbeda, yakni:

- Kue A membutuhkan 1 bungkus terigu, 1 jam pengerjaan manual, dan 50 menit pengerjaan oleh mesin
- Kue B membutuhkan 2 bungkus terigu, 2 jam pengerjaan manual, dan 30 menit pengerjaan oleh mesin

Per harinya, perusahaan tersebut memiliki 5 mesin yang masing-masing mampu bekerja selama 6 jam dan 10 pekerja yang masing-masing mampu bekerja selama 8 jam. Sedangkan, stok terigu yang dimiliki oleh perusahaan adalah 1000 bungkus. Apabila semua kue selalu terjual habis per harinya, berapa jumlah masing-masing kue yang perlu diproduksi agar perusahaan mendapatkan keuntungan maksimal?

Metode Penyelesaian: Pendekatan Grafis

Metode penyelesaian: *Graphical Approach*

LP yang memiliki 2 variabel dapat diselesaikan dengan pendekatan grafis. Tahapan penyelesaian menggunakan pendekatan grafis:

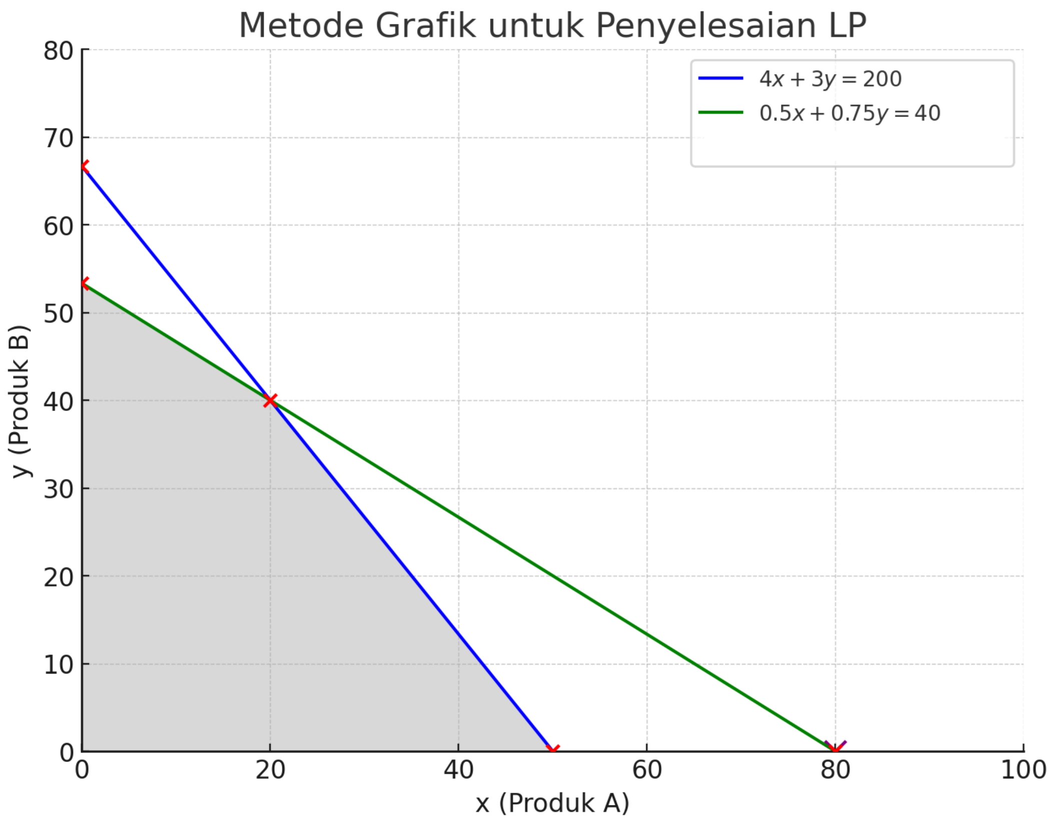
1. Gambarkan area yang mengandung penyelesaian, Gambarkan tiap fungsi constraint dan hitung titik perpotongannya
2. Masukkan titik perpotongan tersebut ke dalam objective function
3. Titik yang menghasilkan nilai objective terbaik adalah solusi yang paling optimum

Solusi Contoh 1: Pendekatan Grafis

Objective function:
max f(x,y) = 70000x + 50000y

Constraints:

- $4x + 3y \leq 200$ (jam kerja pembuatan)
- $0.5x + 0.75y \leq 40$ (jam kerja pengecatan)
- $x \geq 0$
- $y \geq 0$

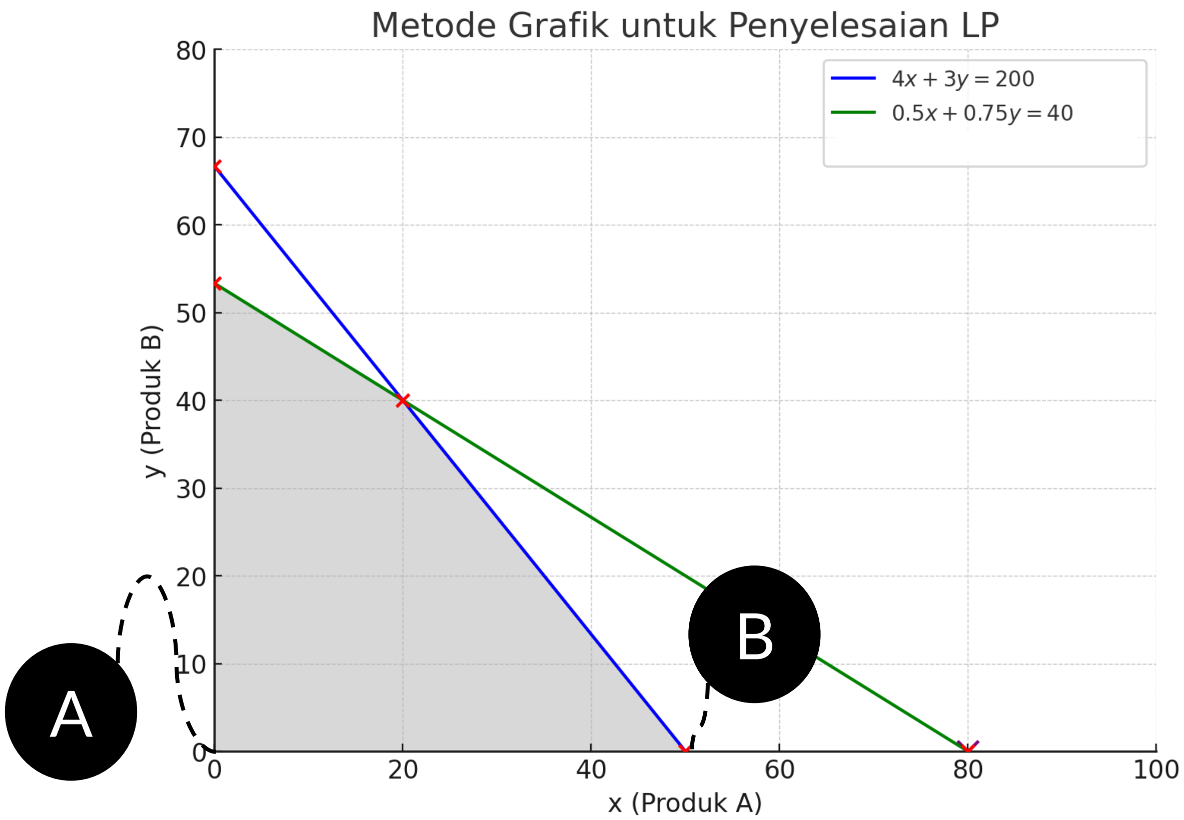


Solusi Contoh 1: Pendekatan Grafis

Titik potong (x, y):

- A (0, 0)
- B (??, ??)

1. Substitusikan masing-masing variabel pada $4x + 3y = 200$ dengan nilai 0.
2. Hasil substitusi berupa titik (0, 66) dan (50, 0)
3. Titik B adalah (50, 0)

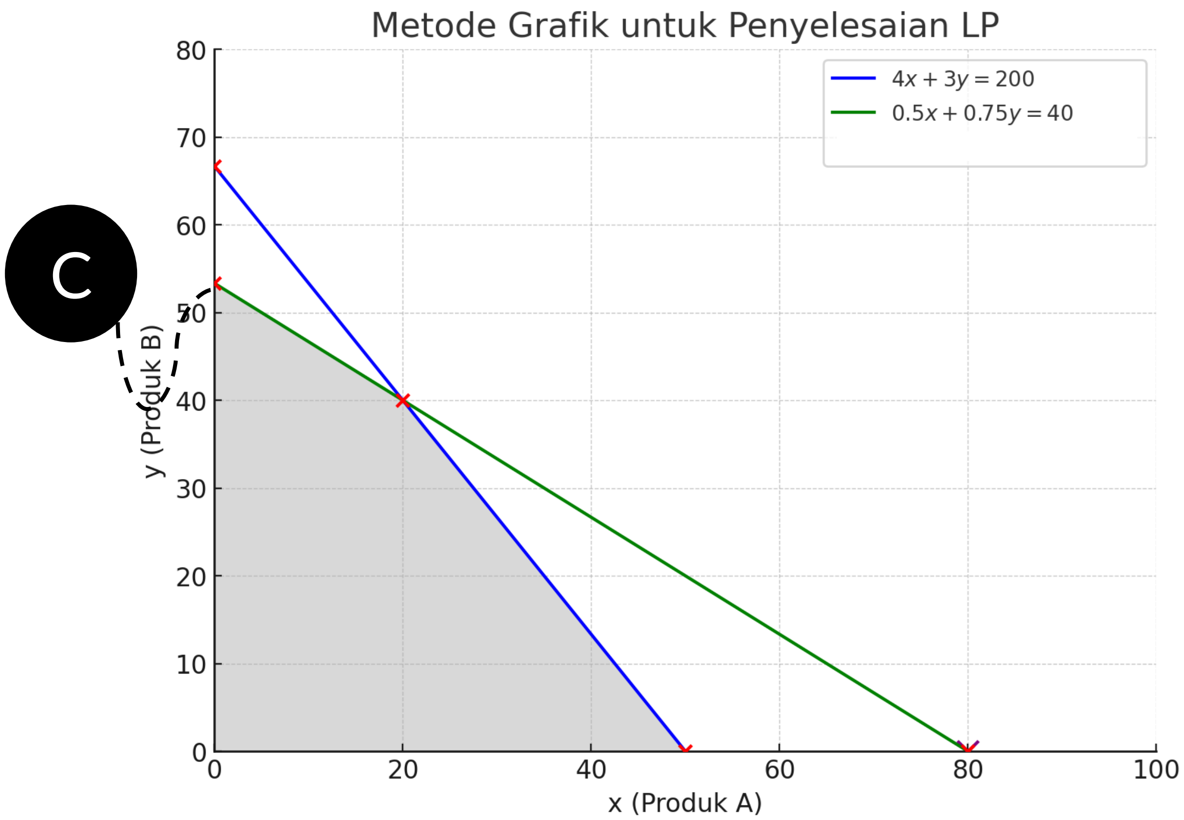


Solusi Contoh 1: Pendekatan Grafis

Titik potong (x, y):

- C (??, ??)

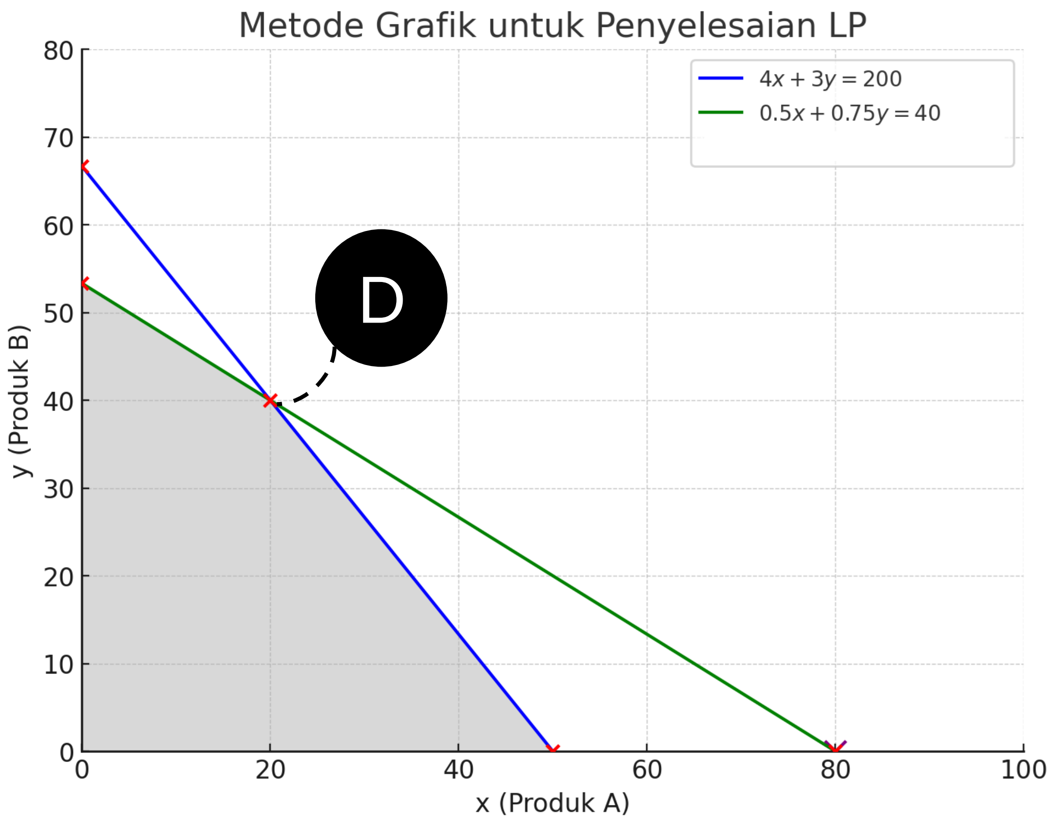
1. Substitusikan masing-masing variabel pada 0.5x + 0.75y = 40 dengan nilai 0.
2. Hasil substitusi berupa titik (0, 53) dan (80, 0)
3. Titik C adalah (0, 53)



Solusi Contoh 1: Pendekatan Grafis

Titik potong (x, y):

- D (??, ??)
  Titik perpotongan antara $4x + 3y = 200$ dan $0.5x + 0.75 y = 40$ bisa dihitung menggunakan metode substitusi atau metode eliminasi gauss



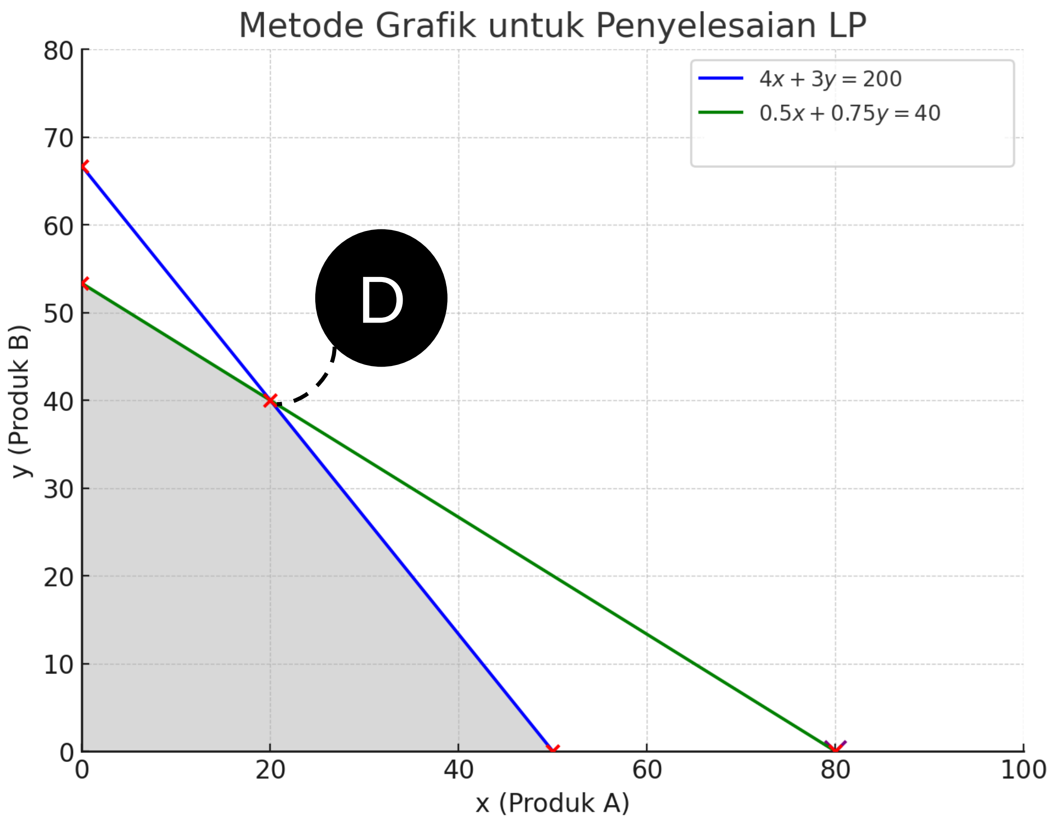
Solusi Contoh 1: Pendekatan Grafis

Titik potong (x, y):

- D (??, ??)
- Koefisien x

  4x + 3y = 200 | x 1
  0.5x + 0.75y = 40 | x 8
  ==========================
  4x + 3y = 200
  4x + 6y = 320
  (-)
  ==========================
  -3y = -120
  y = 40
- Koefisien y

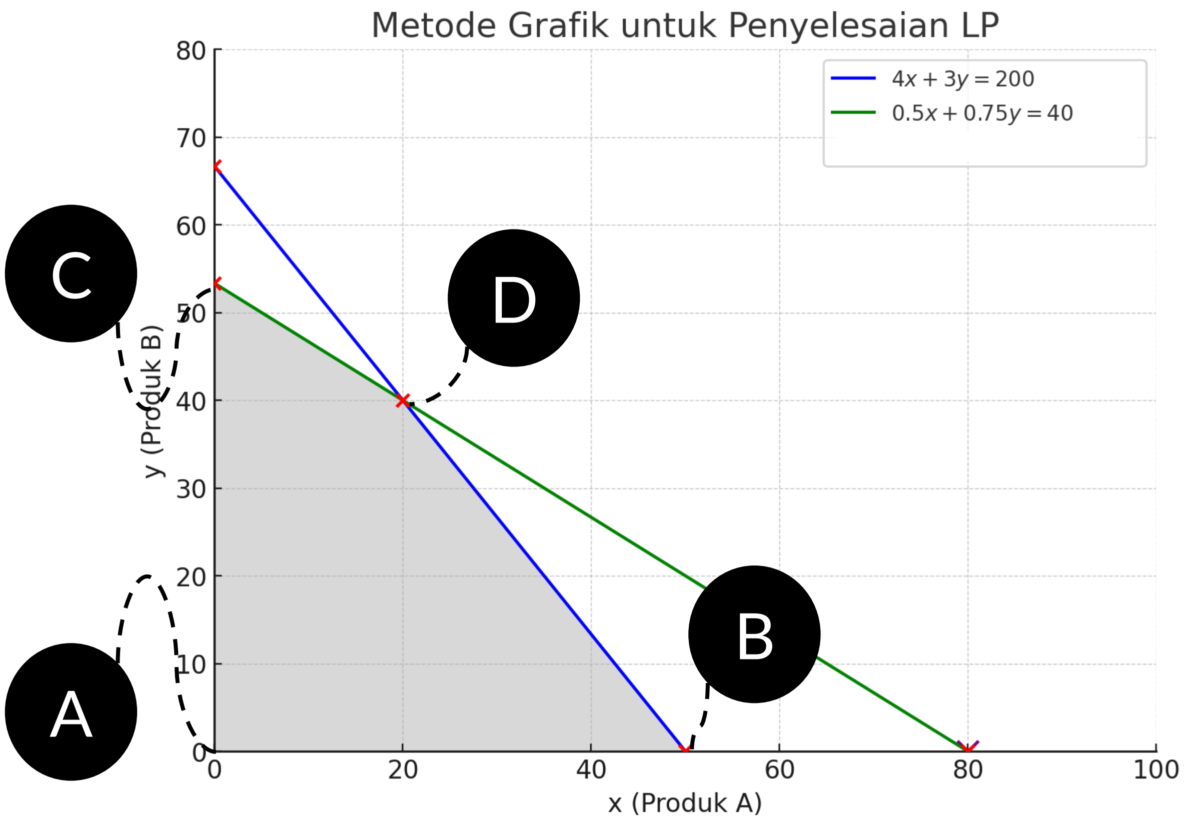
  4x + 3(40) = 200
  4x = 200-120
  x = 20
- Titik D adalah (20, 40)



Solusi Contoh 1: Pendekatan Grafis

Titik potong (x, y):

- A (0, 0)
- B (53, 0)
- C (0, 66)
- D (20, 40)

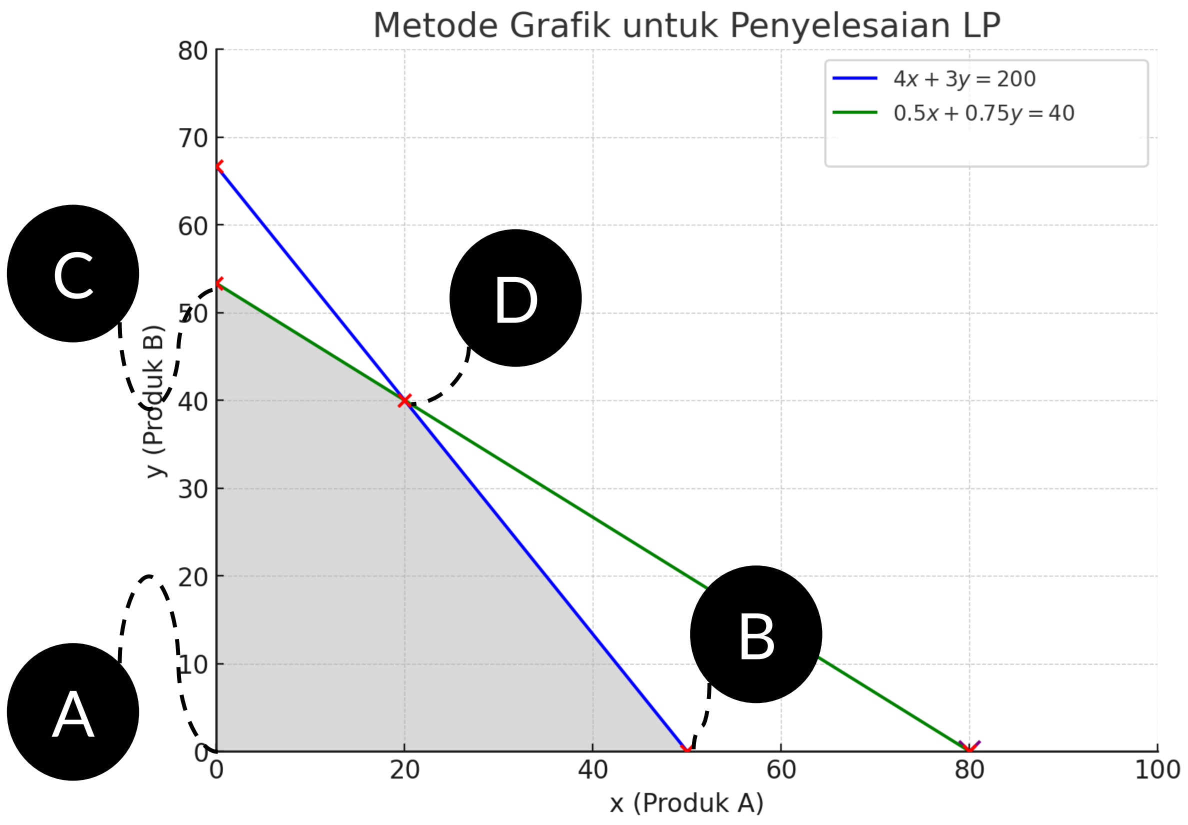


Solusi Contoh 1: Pendekatan Grafis

Evaluasi objective function
max f(x,y) = 70000x + 50000y:

- A (0, 0) = 70000(0) + 50000(0) = 0
- B (53, 0) = 70000(53) + 50000(0) = 3500000
- C (0, 66) = 70000(0) + 50000(66) = 3300000
- D (20, 40) = 70000(20) + 50000(40) = 3400000

Solusi optimum didapatkan ketika x = 53 dan y = 0



Contoh 2

- Suatu perusahaan akan memproduksi 2 macam barang yang jumlahnya tidak boleh lebih dari 18 unit. Keuntungan dari produk I dan produk II adalah Rp. 7500,- dan Rp. 4250,- per unit.
- Dari survey terlihat bahwa produk I harus dibuat sekurang kurangnya 5 unit, sedangkan produk II sekurang kurangnya 3 unit.
- Mengingat bahan baku yang ada maka jumlah produk kumulatif yang dapat dibuat paling sedikitnya 10 unit.
- Tentukan banyaknya produk yang harus dibuat untuk mendapatkan keuntungan yang maksimum ?

Contoh 2

- Suatu perusahaan akan memproduksi 2 macam barang yang jumlahnya tidak boleh lebih dari 18 unit. Keuntungan dari produk I dan produk II adalah Rp. 7500,- dan Rp. 4250,- per unit.
- Dari survey terlihat bahwa produk I harus dibuat sekurang kurangnya 5 unit, sedangkan produk II sekurang kurangnya 3 unit.

Decision variable:

Jumlah produk I yang diproduksi = $x1$

Jumlah produk II yang diproduksi = $x2$

Objective function:

maks $f(x1,x2) = 7500x1 + 4250x2$

Contoh 2

- Suatu perusahaan akan memproduksi 2 macam barang yang jumlahnya tidak boleh lebih dari 18 unit. Keuntungan dari produk I dan produk II adalah Rp. 7500,- dan Rp. 4250,- per unit.
- Dari survey terlihat bahwa produk I harus dibuat sekurang kurangnya 5 unit, sedangkan produk II sekurang kurangnya 3 unit.

Decision variable:

Jumlah produk I yang diproduksi = x1

Jumlah produk II yang diproduksi = x2

Objective function:

maks f(x1,x2) = 7500x1 + 4250x2

Constraint

x1 + x2 ≤ 18 (total unit produk)

x1 + x2 ≥ 10 (total unit produk)

Contoh 2

- Suatu perusahaan akan memproduksi 2 macam barang yang jumlahnya tidak boleh lebih dari 18 unit. Keuntungan dari produk I dan produk II adalah Rp. 7500,- dan Rp. 4250,- per unit.
- Dari survey terlihat bahwa produk I harus dibuat sekurang kurangnya 5 unit, sedangkan produk II sekurang kurangnya 3 unit.
- Mengingat bahan baku yang ada

Decision variable:

Jumlah produk I yang diproduksi = x1

Jumlah produk II yang diproduksi = x2

Objective function:

maks f(x1,x2) = 7500x1 + 4250x2

Constraint:

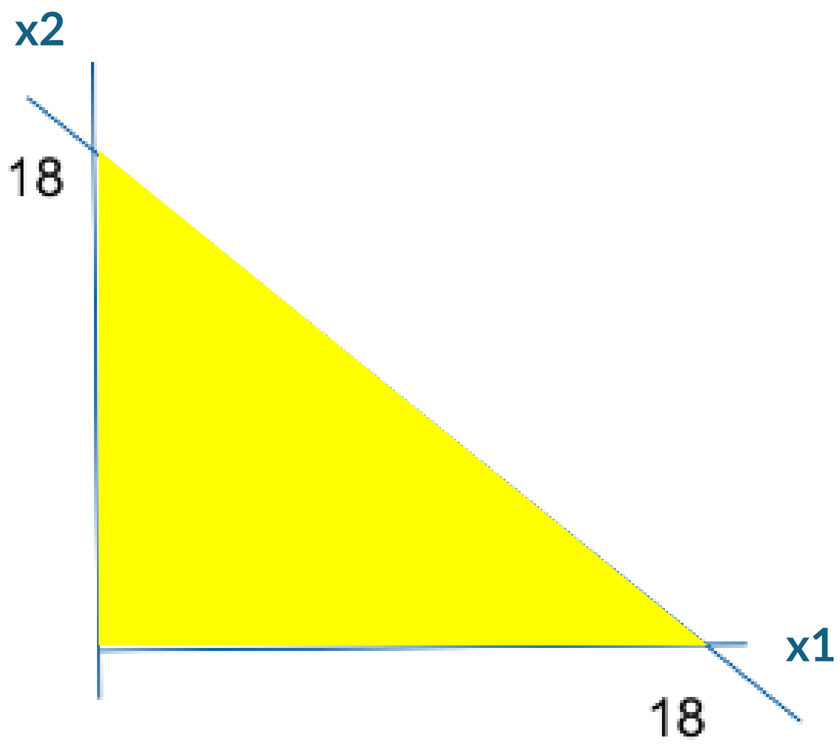
$x1 + x2 \leq 18$ (total unit produk)

$x1 + x2 \geq 10$ (total unit produk)

$x1 \geq 5$ (total unit produk I)

$x2 \geq 3$ (total unit produk II)

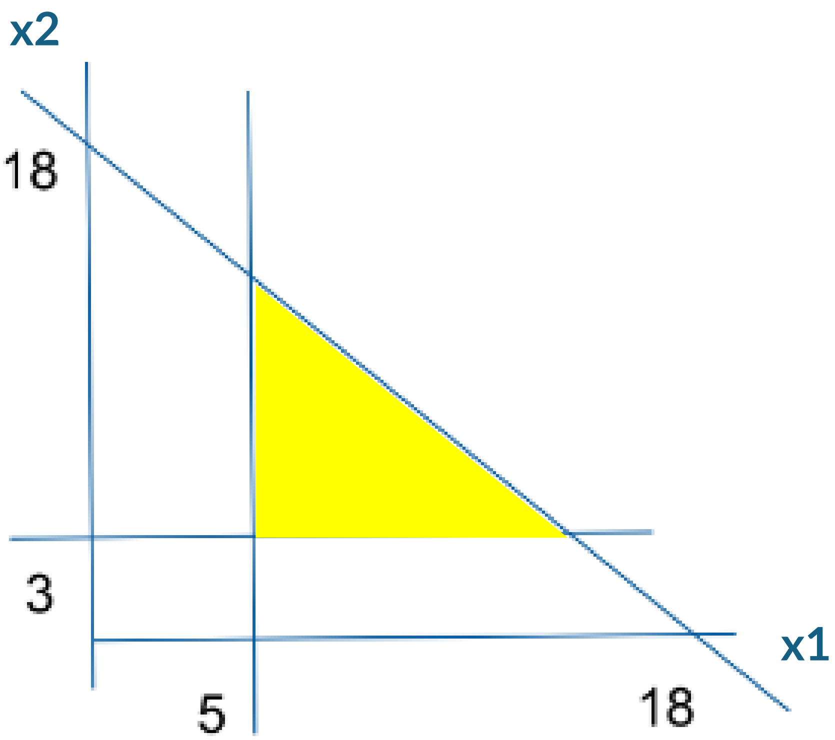
Solusi Contoh 2: Pendekatan Grafis



Decision variable:
Jumlah produk I yang diproduksi = x1
Jumlah produk II yang diproduksi = x2

Constraint:
x1 + x2 $\leq$ 18 (total unit produk)

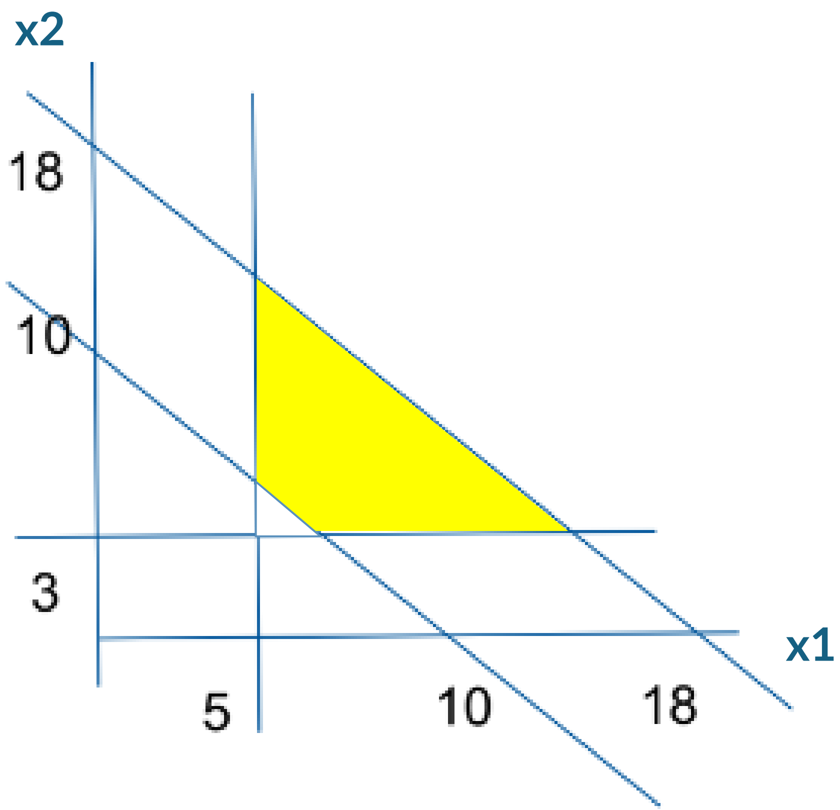
Solusi Contoh 2: Pendekatan Grafis



Decision variable:
Jumlah produk I yang diproduksi = x1
Jumlah produk II yang diproduksi = x2

Constraint:
$x1 + x2 \leq 18$ (total unit produk)
$x1 \geq 5$ (total unit produk I)
$x2 \geq 3$ (total unit produk II)

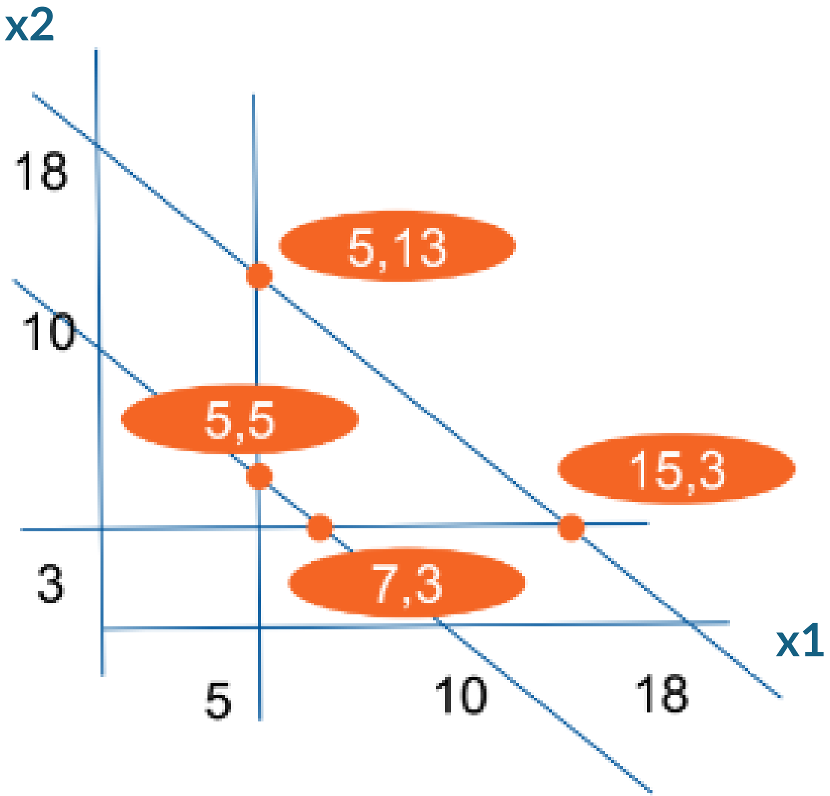
Solusi Contoh 2: Pendekatan Grafis



Decision variable:
Jumlah produk I yang diproduksi = x1
Jumlah produk II yang diproduksi = x2

Constraint:
$x1 + x2 \leq 18$ (total unit produk)
$x1 \geq 5$ (total unit produk I)
$x2 \geq 3$ (total unit produk II)
$x1 + x2 \geq 10$ (total unit produk)

Solusi Contoh 2: Pendekatan Grafis



Objective function: maks f(x1,x2) = 7500x1 + 4250x2

Titik	Koordinat	Objective value
A	(5,5)	7500(5) + 4250(5) = 58750
B	(5,13)	7500(5) + 4250(13) = 92750
C	(7,3)	7500(7) + 4250(3) = 65250
D	(15,3)	7500(15) + 4250(3) = 125250