SPK: Transportation Problem

Tri Hadiah Muliawati
PENS - 2025

Review

Linear Programming (LP)

LP adalah salah satu metode riset operasi yang sudah ada sejak dulu dan masih banyak digunakan di industri untuk menyelesaikan permasalahan yang bisa diformulasikan secara matematis dan memiliki karakteristik linear.

Suatu permasalahan termasuk LP jika:

- Fungsi objektifnya linear (tanpa kuadrat, eksponen, atau interaksi variabel)
- Kendala linear dalam bentuk $\leq$, $\geq$, $=$
- Variabel keputusan bersifat numerik

Elemen LP

1. *Decision Variable* (1, 2, … n) / Variabel Keputusan
2. *Objective function* / Fungsi objektif
3. *Constraints* (1, 2, … m) / Batasan / Kendala

$$
\begin{array}{llll}
\min & f(x_1, x_2, ..., x_n) & & \text{(objective function)} \\
\text{s.t.} & g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i & \forall i = 1, ..., m & \text{(constraints)} \\
 & x_j \in \mathbb{R} & \forall j = 1, ..., n. & \text{(decision variable)}
\end{array}
$$

Formulasi atau Pemodelan LP

Berikut merupakan hal yang perlu diperhatikan ketika memformulasikan LP:

- Definisikan *decision variable* di awal
- Tuliskan *objective function* sebelum menuliskan *constraint*
- Gunakan unit pengukuran yang sama
- Tuliskan komentar di akhir tiap *constraint* untuk memperjelas
- *Functional constraint* dituliskan sebelum *signed constraint*

Kelebihan dan kekurangan metode penyelesaian LP

	Metode Simplex	Metode Grafik
Kelebihan	• Dapat menangani banyak *decision variable* dan *constraints*. • Efisien dalam menemukan solusi optimal.	• Mudah dipahami dan divisualisasikan untuk 2 variabel. • Cocok untuk tujuan pembelajaran dan demonstrasi konsep.
Kekurangan	• Perhitungan bisa menjadi kompleks secara manual untuk masalah besar. • Tidak selalu optimal untuk masalah dengan banyak batasan khusus seperti variabel integer.	• Hanya bisa digunakan untuk masalah dengan dua variabel keputusan. • Tidak praktis untuk masalah LP dengan banyak variabel.

Kelebihan dan kekurangan metode penyelesaian LP

	Solver di Excel (Simplex Solver)	Python (Scipy/Pulp)
Kelebihan	• Mudah digunakan tanpa perlu coding atau pemrograman tambahan.	• Fleksibel dan mampu menangani LP kompleks dengan berbagai metode.
Kekurangan	• Kurang fleksibel dibandingkan pemrograman berbasis kode seperti Python.	• Memerlukan pemahaman pemrograman dasar untuk implementasi.

Kelebihan dan kekurangan LP

1	Kelebihan	• Dapat menyelesaikan masalah optimasi yang bersifat linear, deterministik, dan memiliki keterbatasan sumber daya. • Solusi optimal dapat ditemukan secara sistematis dan efisien. • Dapat menyelesaikan masalah dengan banyak variabel menggunakan metode Simplex.
2	Kekurangan	• Hanya dapat menangani hubungan yang linear. • Tidak memperhitungkan faktor ketidakpastian dalam kondisi dunia nyata

Akhir dari Review

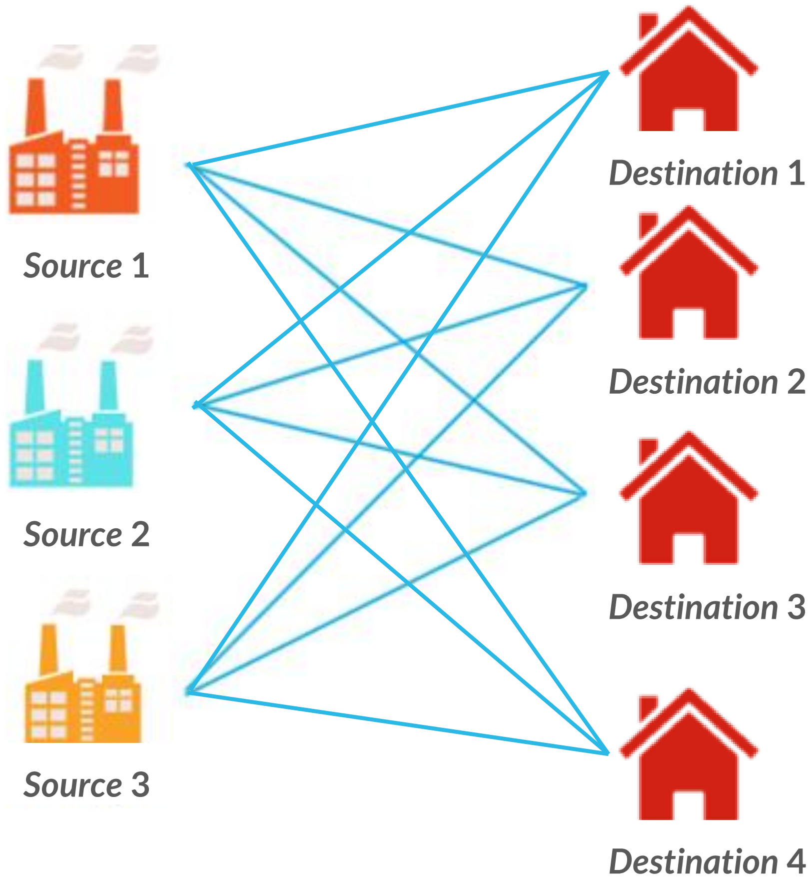
Transportation Problem (TP)

Overview

- TP merupakan salah satu tipe permasalahan *linear programming* yang bertujuan untuk meminimalisir biaya (*cost*) pengiriman komoditas.
- TP pertama kali diperkenalkan oleh F.L. Hitchcock tahun 1941 pada artikelnya yang berjudul ‘*The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities*’
- Pada tipe permasalahan ini, ada komoditas yang perlu didistribusikan dari berbagai sumber (*source*) menuju beberapa tujuan (*destination*).

Overview

- Tiap *source* memiliki jumlah persediaan (*supply*) yang terbatas.
- Di sisi lain, tiap *destination* memiliki kebutuhan (*demand*) yang berbeda-beda yang perlu dipenuhi.
- Biaya untuk pengiriman komoditas bersifat proporsional terhadap jumlah komoditas yang dikirimkan.
- Solusi untuk penyelesaian TP bisa dilakukan melalui 2 tahap, yakni
    - Menentukan *Initial Basic Feasible Solution (IBFS)*
    - Menentukan *optimal solution*



- Pada ilustrasi di samping, barang akan didistribusikan dari 3 node sumber (*source*) menuju 4 node tujuan (*destination*).
- Tiap sumber dan tujuan tsb bisa kita sebut sebagai *node*.
- Pada *transportation problem* jumlah *node* asal dan *node* tujuan tidak harus sama.

	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	c_{11} (x_{11})	c_{12} (x_{12})	c_{13} (x_{13})	c_{14} (x_{14})	s_1
S_2	c_{21} (x_{21})	c_{22} (x_{22})	c_{23} (x_{23})	c_{24} (x_{24})	s_2
S_3	c_{31} (x_{31})	c_{32} (x_{32})	c_{33} (x_{33})	c_{34} (x_{34})	s_3
Demand	d_1	d_2	d_3	d_4	

- `S1,S2,S3` adalah *node* asal (*source*) yang memiliki persediaan barang (`m` = total *node* asal).
- `D1,D2,D3,D4` adalah *node* tujuan (*destination*) yang membutuhkan barang (`n` = total *node* tujuan).
- `cij` adalah biaya yang perlu dikeluarkan untuk mengirimkan tiap barang dari *node* asal ke-`i` menuju *node* tujuan ke-`j`.
- `xij` adalah jumlah barang yang dikirimkan dari *node* asal ke-`i` menuju *node* tujuan ke-`j`.
- `s1,s2,s3` adalah total persediaan barang yang dimiliki oleh `S1,S2,S3`.
- `d1,d2,d3,d4` adalah total kebutuhan barang yang diminta oleh `D1,D2,D3,D4`.

Elemen LP (1/2)

- *Decision variables*:
  `xij` (jumlah barang yang dikirimkan dari node asal ke-i menuju node tujuan ke-j).
- *Objective function*:
  `min Z = c11*x11 + c12*x12 + c13*x13 + c14*x14 + c21*x21 + c22*x22 + c23*x23 + c24*x24 + c31*x31 + c32*x32 + c33*x33 + c34*x34`

Elemen LP (2/2)

Constraints:

- Kapasitas node asal

  $x11 + x12 + x13 + x14 \leq s1$

  $x21 + x22 + x23 + x24 \leq s2$

  $x31 + x32 + x33 + x34 \leq s3$

- Permintaan node tujuan

  $x11 + x21 + x31 \leq d1$

  $x12 + x22 + x32 \leq d2$

  $x13 + x23 + x33 \leq d3$

  $x14 + x24 + x34 \leq d4$

Tipe

Berdasarkan tipenya, *transportation problem* dapat dibedakan menjadi 2, yakni:

- *Balanced Transportation Problem:*
  Total stok barang yang akan didistribusikan (*supply*) dan total kebutuhan barang (*demand*) sama.
- *Unbalanced Transportation Problem:*
  Total stok barang yang akan didistribusikan (supply) dan total kebutuhan barang (demand) tidak sama.

Untuk bisa diselesaikan, *Unbalanced Transportation Problem* perlu diubah terlebih dahulu menjadi *Balanced Transportation Problem* dengan menambahkan *dummy row / column* yang tiap cell-nya memiliki *unit cost* sebesar 0.

	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	c_{11} (x_{11})	c_{12} (x_{12})	c_{13} (x_{13})	c_{14} (x_{14})	s_1
S_2	c_{21} (x_{21})	c_{22} (x_{22})	c_{23} (x_{23})	c_{24} (x_{24})	s_2
S_3	c_{31} (x_{31})	c_{32} (x_{32})	c_{33} (x_{33})	c_{34} (x_{34})	s_3
Demand	d_1	d_2	d_3	d_4	

- Agar suatu *transportation problem* bisa diselesaikan, total persediaan barang harus sama dengan total barang yang dibutuhkan.
- Pada *unbalanced transportation problem*, kita perlu menambahkan sebuah *dummy row* atau *dummy column* (yang memiliki biaya per *cell* = 0 atau `cij` = 0) untuk mengubahnya menjadi *balanced transportation problem*.
- Selain itu, jumlah barang yang dikirimkan dari *node* asal ke-`i` menuju *node* tujuan ke-`j` tidak boleh kurang dari 0 (`xij≥0`).
- Jika suatu cell pada tabel memiliki alokasi positif (`xij > 0`) maka cell tersebut disebut sebagai *occupied cell*, selain itu cell tersebut merupakan *empty cell* atau *unoccupied cell*.

Studi Kasus 1

Sebuah perusahaan logistik memiliki tiga gudang yang memasok produk ke empat toko. Perusahaan ingin menentukan jumlah produk yang dikirim dari setiap gudang ke setiap toko untuk meminimalkan biaya bahan bakar, dengan mempertimbangkan kapasitas gudang dan permintaan toko.

- Kapasitas gudang 1, gudang 2, dan gudang 3 adalah 7, 9, dan 18 kwintal.
- Permintaan toko 1, toko 2, toko 3, dan toko 4 adalah 5, 8, 7, dan 14 kwintal.
- Masing-masing gudang dapat mengirimkan produk ke masing-masing toko (tidak ada rute yang tidak tersedia).

Studi Kasus 1

Adapun biaya pengiriman per unit adalah:

- Gudang 1 ke Toko 1: 19
- Gudang 1 ke Toko 2: 30
- Gudang 1 ke Toko 3: 50
- Gudang 1 ke Toko 4: 10
- Gudang 2 ke Toko 1: 70
- Gudang 2 ke Toko 2: 30
- Gudang 2 ke Toko 3: 40
- Gudang 2 ke Toko 4: 60
- Gudang 3 ke Toko 1: 40
- Gudang 3 ke Toko 2: 8
- Gudang 3 ke Toko 3: 70
- Gudang 3 ke Toko 4: 20

Studi Kasus 1

- *Decision variable*:
  `xij` (jumlah barang yang dikirimkan dari gudang ke-i menuju toko ke-j).
  `i = 1, 2, 3`
  `j = 1, 2, 3, 4`
- Objective function:
  `min Z = 19*x11 + 30*x12 + 50*x13 + 10*x14 + 70*x21 + 30*x22 + 40*x23 + 60*x24 + 40*x31 + 8*x32 + 70*x33 + 20*x34`

Studi Kasus 1

Constraints:

- Kapasitas gudang

  $x11 + x12 + x13 + x14 \leq 7$
  $x21 + x22 + x23 + x24 \leq 9$
  $x31 + x32 + x33 + x34 \leq 18$
- Permintaan toko

  $x11 + x21 + x31 \leq 5$
  $x12 + x22 + x32 \leq 8$
  $x13 + x23 + x33 \leq 7$
  $x14 + x24 + x34 \leq 18$

Studi Kasus 1

	Toko 1 (D1)	Toko 2 (D2)	Toko 3 (D3)	Toko 4 (D4)	Supply
Gudang 1 (S1)	19	30	50	10	s1 = 7
Gudang 2 (S2)	70	30	40	60	s2 = 9
Gudang 3 (S3)	40	8	70	20	s3 = 18
Demand	d1 = 5	d2 = 8	d3 = 7	d4 = 18	

Latihan Studi Kasus 2

Sebuah perusahaan logistik memiliki empat pabrik yang menghasilkan produk untuk didistribusikan ke 3 kota. Perusahaan ingin menentukan jumlah produk yang dikirim dari setiap pabrik ke setiap kota untuk meminimalkan biaya bahan bakar, dengan mempertimbangkan kapasitas produksi pabrik dan permintaan kota. Buatlah pemetaan TP menggunakan table.

- Kapasitas pabrik 1, pabrik 2, pabrik 3, dan pabrik 4 adalah 140, 260, 360, dan 220 ton.
- Permintaan kota 1, kota 2, dan kota 3 adalah 200, 320, dan 250 ton.
- Masing-masing pabrik dapat mengirimkan produk ke masing-masing kota (tidak ada rute yang tidak tersedia).

Studi Kasus 2

Tentukan *Decision variable:*, *objective function*, dan *constraints* dari studi kasus tersebut.

Adapun biaya pengiriman per unit adalah:

- Pabrik 1 ke kota 1: 48
- Pabrik 1 ke kota 2: 60
- Pabrik 1 ke kota 3: 56
- Pabrik 2 ke kota 1: 45
- Pabrik 2 ke kota 2: 55
- Pabrik 2 ke kota 3: 53
- Pabrik 3 ke kota 1: 50
- Pabrik 3 ke kota 2: 65
- Pabrik 3 ke kota 3: 60
- Pabrik 4 ke kota 1: 52
- Pabrik 4 ke kota 2: 64
- Pabrik 4 ke kota 3: 55